

## Drugi egzamin pisemny z RRZw, 02.09.2023

G.Filipuk, N.Mokrzański, T.Piasecki, P.Rybka, M.Szlenk, H.Żołądek

Egzamin trwa od 10:00 do 13:00. W trakcie egzaminu studenci nie mogą komunikować się, ani korzystać z żadnych dodatkowych pomocy. Jedynym odstępstwem jest możliwość dwukrotnego zajrzenia do papierowego egzemplarza skryptu wykładu, który będzie udostępniony.

Proszę najpierw przeczytać wszystkie zadania, a rozwiązywanie zacząć od najłatwiejszego.

**Ważne:** Każde zadanie powinno być zapisane na osobnej kartce. Prosimy o staranne uzasadnianie odpowiedzi.

**Zadanie 1.** Rozważmy równanie

$$x' = x^2 \ln x, \quad t \geq 0, \quad x(0) = 2.$$

- a) Wykazać, że równanie powyżej ma dokładnie jedno rozwiązanie na przedziale  $[0, \varepsilon]$  dla pewnego  $\varepsilon > 0$ .  
b) Wykazać, że rozwiązanie nie jest określone na  $[0, +\infty)$ .

**Wskazówka:** Wykorzystać nierówność  $x^2 \ln x \geq x^2$  dla  $x \geq e$ .

**Zadanie 2.** Dla jakich rzeczywistych  $k$  i  $\omega$  wszystkie rozwiązania równania

$$\ddot{x} + k^2 x = \cos \omega t$$

są okresowe?

**Zadanie 3.** Wyznaczyć punkty stacjonarne następującego układu, zbadać ich stabilność, naszkicować portret fazowy,

$$\begin{cases} x' = 1 - y, \\ y' = x^2 - y^2. \end{cases}$$

**Zadanie 4.** Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2, & x_1(0) = 4, \\ x_2' = 3x_1 + 4x_2, & x_2(0) = 0. \end{cases}$$